№ 19302

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01) ශුද්ධ ගණිතය I (01) Pure Mathematics 1	**01** **S | I**

පැය තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $$f(r) = \frac{1}{r^2} \quad (r \neq 0)$$ නම්,

$$f(r+1) - f(r) = -\frac{(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$$\frac{3}{1^2 . 2^2} + \frac{5}{2^2 . 3^2} + \frac{7}{3^2 . 4^2} + \dots$$

ශ්‍රේණියේ පළමුවැනි පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.
ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

(ii) $|x| < 1$ සඳහා,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

ප්‍රතිඵලය උපකල්පනය කිරීමෙන්

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

බව පෙන්වන්න.

$\dfrac{1}{r(r+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීමෙන්,

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

බව පෙන්වන්න.
$n \to \infty$ විට, $S_n \to 1 - \ln 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i) $x - 4 < x(x-4) \leqslant 5$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාස සොයන්න.

(ii) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $n\ (\geqslant 2)$ යනු නියතයකි.
$t = e^x$ යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,
(අ) y හි අඩුතම අගය $\sqrt{n^2-1}$ බව පෙන්වන්න.
(ආ) $k > \sqrt{n^2-1}$ නම්, $y = k$ සමීකරණයට, t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.
(ඇ) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය $1 + \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$ බව පෙන්වා, වඩා කුඩා මූලය ලියන්න.

ඉහත දක්වූ අවස්ථාවෙහි දී, $y = k$ සමීකරණය සපුරාලන x හි තාත්ත්වික අගයන් දෙක, $n\ (\geqslant 2)$ හි කවර අගයක් සඳහා වූව ද,
$\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$ සහ $\log_e(\sqrt{2}+1)$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ හි සාධකයක් $(x - y)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට ඛිදින්න.

x, y, z යුකලි ඒවායෙන් ඕනෑම දෙකක් එකිනෙකට සමාණ නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $f(x, y, z)$ ශුන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + px + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත් නම්, $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න.

මෙම අවස්ථාවෙහිදී, $ax^3 + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය උපකල්පනය කරමින්, සෘණ නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා එය සාධනය කරන්න.

(i) මතු දක්වෙන දෑ සුළු කිරීම සඳහා, ඉහත ප්‍රමේයය භාවිත කරන්න.

(අ) $(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3 \ (\cos \theta + i \sin \theta)^2$

(ආ) $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \ (\cos 4\theta - i \sin 4\theta)$

(ii) $(\sqrt{5} + 2i)^n$ යන්න $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි n නිඛිලමය වන අතර θ යනු $\sin \theta = \dfrac{2}{3}$ වන පරිදි වූ සුළු කෝණයක් වේ.

ඒ නයින්, සියලුම n සඳහා

$$(\sqrt{5} + 2i)^n + (\sqrt{5} - 2i)^n$$

තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

$n = 6$ විට මෙම ප්‍රකාශනයෙහි අගය සොයන්න.

5. z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි මාපාංකය සහ විස්තාරය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

තව ද, z_1', z_2', z_3' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1', P_2', P_3' ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$$\frac{z_1' - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_2' - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3' - z_2}{z_1 - z_2} \text{ නම්,}$$

එවිට $P_2 P_3 P_1'$, $P_3 P_1 P_2'$, $P_1 P_2 P_3'$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.

තව ද, $P_1 P_2 P_3$ සහ $P_1' P_2' P_3'$ ත්‍රිකෝණයන්ට එක ම කේන්ද්‍රකයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න.

6. (i) *ENGINEERING* යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල යොද ගැනීමෙන් ලබා ගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඒවා අතුරින් කොපමණ සංඛ්‍යාවක E අක්ෂර තුන ම එකට එක්වී පිහිටා තිබේ ද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක ඒවා මුලටම පවතී ද?

(ii) පත්‍රිකා 32 කින් සමන්විත කාණ්ඩයක පත්‍රිකා 8 ක් කළපාට ද, 8 ක් රතුපාට ද, 8 ක් නිල්පාට ද 8 ක් කොළපාට ද වේ. එක ම පාට පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

(අ) එම කාණ්ඩයෙන් පත්‍රිකා තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර ගණන සොයන්න.

(ආ) (අ) හි වූ තේරීම් අතුරින්, පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වූ පාටවලින් නොපවතින සේ වූ තේරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(සැ. යු. සියලු ම ආගණන කාර්‍ය පැහැදිලි ව දක්විය යුතු වේ.)

7. ධන නිඛිලමය දර්ශකයන් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, {}^nC_r \, x^{r-1} = n(1 + x)^{n-1}$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $n(1 + x)^{n-1}$ සහ $(1 + x)^n$ හි ප්‍රසාරණවල ගුණිතය සැලකීමෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, ({}^nC_r)^2$ යන්න $n(1 + x)^{2n-1}$ ප්‍රසාරණයේ x^{n-1} හි සංගුණකයට සමාන බව පෙන්වන්න.

(iii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, ({}^nC_r)^2 = \frac{(2n - 1)!}{\{(n - 1)!\}^2}$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. (i) u සහ v යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, u, v සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(uv)$ සඳහා සූත්‍රයක් මූලධර්මවලින් ලබා ගන්න.

(ii) $y = \frac{u}{v}$ නම්, ලඝුගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන්

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $$y = \frac{u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n}{v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n}$$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx} - \frac{1}{v_i}\frac{dv_i}{dx} \right)$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි u, v ආදිය x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වේ.

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$ යන්න $\tan^{-1} x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

9. (i) $$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $$\int_0^\pi x \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\,dx$$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.
තව ද, $n \geqslant 2$ විට,

$$n\int_0^\pi \sin^n x\,dx = (n - 1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x\,dx$$

බව ද පෙන්වන්න.
ඒ නයින්,

$$\int_0^\pi x \sin^4 x\,dx \quad \text{සහ} \quad \int_0^\pi x \sin^5 x\,dx$$

අගයන්න.

(ii) $\frac{d}{d\theta}\log_e(\sec\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ බව පෙන්වා

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$ සෙවීමට එය භාවිත කරන්න.

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{2x^2 + 6x + 5}}$$ ඇගැයීම සඳහා

$$y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 5}}{x + 2}$$ ආදේශය භාවිත කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $y = \tan^{-1} x$ නම් $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ සහ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ රාශි x ඇසුරෙන් සොයන්න.

x^3 පදය තෙක්, $\tan^{-1} x$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

තව ද, සියලු ම තාත්වික x සඳහා, $y = \tan^{-1} x$ හි $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \right)$ ප්‍රස්තාරයේ කටු සටහනක් ඇද වක්‍රයේ වැඩිතම බෑවුම සඳහන් කරන්න. එම සටහනෙහිම, $y = kx$ රේඛාව ද අඳින්න ; මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\tan^{-1} x = kx$ සමීකරණයට

(අ) ප්‍රභින්න මූල තුනක් තිබීම සඳහා,

(ආ) එක් මූලයක් පමණක් තිබීම සඳහා,

k හි අගයන් පිහිටිය යුතු පරාස ලියන්න.

$\tan^{-1}x$ සඳහා ඔබ ලබා ගත් මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, $12 \tan^{-1} x = 11x$ සමීකරණයට 0.5 ට ආසන්න වූ මූලයක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

11. C වක්‍රයක් $x = t + 1$, $y = t^3 - t$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබේ.

(i) C හි හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒ එක එකක් අනුරූප වන්නේ උපරිමයකට ද අවමයකට ද නතිවර්තනයකට ද යන්න සඳහන් කරන්න.

(ii) C හි කටුසටහනක් අඳින්න.

(iii) ඒ නයින්,

(අ) $x = t^3 - t$, $y = t + 1$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේත්,

(ආ) $x = t + 1$, $y = | t^3 - t |$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C'' වක්‍රයේත් කටුසටහන් අඳින්න.

12. $y^2 = 4x$ පරාවලයේත් $x^2 - y^2 = 1$ බහුවලයේත් $x = 4$ රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එක ම රූ සටහනෙහි අඳින්න.

(i) $x^2 - y^2 - 1 \leqslant 0$ සහ $y^2 - 4x \leqslant 0$ වන සේ වූ S_1 පෙදෙස සටහන් කර, S_1 න් පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න.

(ii) S_2 යනු $y^2 = 4x$ පරාවලයෙන් හා $x = 4$ රේඛාවෙන් පර්යන්තගත පෙදෙසයි. S_2 වර්ගඵලය, $x = 4$ රේඛාව වටා ඍජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.